**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

|  |
| --- |
| **Что это**? |

Предметом данного курса является решение задач, связанных с поиском экстремума. Курс состоит из двух частей:

* **Вариационное исчисление**: связано с поиском экстремумов интегральных функционалов.
* **Методы оптимизации**:занимается решением задач оптимального управления.

# ВВЕДЕНИЕ

Введение включает в себя две лекции:

* **Практические примеры экстремальных задач.** Мы даем постановки некоторых классических задач на экстремум, возникающие на практике.
* **Минимизация функций.**Здесь рассматривается условие стационарности, дающее простой и естественный способ решение задач на экстремум функции и являющееся основой всей теории экстремума.

## Лекция № 1. Введение

Характеризуется предмет курса данного курса – решение задач нахождения экстремумов функционала. Его основные разделы – вариационное исчисление и теория оптимального управления. В качестве примеров рассматриваются возникшие на практике задачи о брахистохроне и о максимизации дальности полета ракеты и еще что-то по конечномерной оптимизации. В заключительной части лекции рассматриваются классические методы исследования функции на экстремум, основанные на условии экстремума Ферма. Приводятся конкретные примеры его практического применения. Анализируется комплекс проблем, связанных с этими вопросами.

### 1.1. Предмет и структура курса

В стандартном курсе математического анализа рассматривается задача на экстремум функции одной или нескольких переменных. Однако на практике часто возникают задачи минимизации функционалов, т.е. отображений множеств произвольной природы на множество действительных чисел. В качестве аргументов функционалов обычно выступает одна или несколько функций. Таким образом, объектом поиска оказывается не число (или вектор), минимизирующие заданную функцию, а функция (или вектор-функция), минимизирующая данный функционал. Задачи такой природы и составляют предмет данного курса.

Мы рассмотрим два класса задач минимизации функционалов. Первый из них связан с минимизацией некоторых интегральных функционалов и исследуется с помощью *вариационного исчисления*. Во втором случае минимизируемый функционал зависит от двух качественно разных функций (или вектор-функций). Одна из них является независимой переменной и называется управлением, а вторая называется состоянием системы и связана с управлением некоторым уравнением состояния. Соответствующие задачи относятся к *теории оптимального управления*. Мы будем исследовать оба класса рассматриваемых задач, а также дадим представление о практических методах решения указанных задач.

### 1.1. Максимизация дальности полета тела

Бросается тело под некоторым углом к горизонту. Требуется определить угол к горизонту, под которым следует бросить тело, чтобы оно улетело как можно дальше. Дадим математическую формулировку задачи.

By the *second Newton’s low* we have the following equations

 (1.1)

where *t* is the time that is the *independent variable*, *x* and *y* are the horizontal and the vertical coordinates of the body that is the state that are the *state functions*, *m* is its mass, and *P* is its weight that are the given *parameters of the system* (see Figure 1.1). We consider these differential equations with the initial conditions

 (1.2)

where the velocity *v* is given, and the angle of the throw *ϕ* is unknown. The *Cauchy problem* (1.1), (1.2) is the *mathematical model* of the system.

We have also the final condition of the flight

 (1.3)

where *T* is a final time. It is obvious that the length of the flight depends on the angle. Calculate it by the formula (see Figure 1.1).

 (1.4)

Thus, we have the following problem.

**Problem 1.1**. *Find the angle ϕ such that the length L will be maximal.*



Figure 1.1. The flight of the body.

Transform this problem statement. Determine the solution of the Cauchy problem (1.1), (1.2). Integrate the equations (1.1) with known initial state derivatives. We have

 (1.5)

where *g* is the gravitational acceleration. Using (1.2), (1.5), we find the state functions



Using (1.3), we obtain the equation with respect to the final time



Then we get



Using (1.4), we find the length of the flight

. (1.6)

Thus, Problem 1.1 is transformed to the problem of maximization of the function *L* with respect to the variable *ϕ* . We obtain the *maximization problem for a function*. This is the easiest extremum problem. We shell solve it in the next lecture.

### 1.2. Задача о брахистохроне

Пусть заданы точки *А* и *В* в вертикальной плоскости, не лежащие на одной прямой, перпендикулярной поверхности земли. Необходимо найти линию, соединяющую эти точки, такую, двигаясь по которой под действием собственного веса, тела попадет из одной точки в другую за минимальное время. Сила трения и сопротивление воздуха не учитываются. В начальный момент времени тело покоится, т.е. его скорость считается равной нулю.

Поместим точку *А* в начало координат. Движение тела будем рассматривать в плоскости, образованной вертикальной прямой, проходящей через точку *А*, и отрезком *АВ*. При этом координату *у* направим вертикально вниз, а координату *х* – горизонтально (см. рис. 1.1). Обозначим через (*х*1,*у*1) координаты точки *В*. Тогда исследуемая задача состоит в отыскании такой функции *у* = *у*(*х*), которая удовлетворяет условиям

*у*(0) = 0, *у*(*х*1) = *у*1 (1.1)

и соответствует минимальному времени на преодоления пути от точки *А* к точке *В*.



Рис. 1.1. Движение тела в задаче о брахистохроне.

Из второго закона Ньютона следует уравнение падения тела

**.

Установим скорость падающего тела в точке с координатой *у*. Учитывая равенства

**,

находим производную



Таким образом, справедливо соотношение

*v* *dv* = *g* *dy*.

Интегрируя полученное выражение, установим равенство

*v*2/2 = *g y* + *c*,

где *с* – произвольная постоянная. Учитывая, что при *у* = 0 (т.е. в точке *А*) тело покоится, заключаем, что константа *с* равна нулю. Тогда скорость падающего тела с вертикальной координатой *у* определяется по формуле

.

Если исключить влияние силы трения и сопротивления окружающей среды, то как свободное падение тела, так и его скатывание по некоторой дуге *у* = *у*(*х*), определяется исключительно действием силы тяготения. Тогда скорость тела на фиксированной высоте в обоих случаях будет одинаковой и равной *v*. Обозначим через *s* длину дуги данной кривой от точки *М*, в которой тело находится в момент времени (см. рис. 1.1) до начала координат – точки *А*. Тогда скорость движущегося тела равна

. (1.2)

Естественно, путь, пройденный телом, а значит, и время, затраченное на его преодоление, существенным образом зависят от функции *у* = *у*(*х*). Предположим, что тело, находящееся в момент времени *t* в точке *М* с координатами (*х*,*у*), двигаясь по рассматриваемой кривой за достаточно малый интервал времени Δ*t* переместится в точку *M*' с координатами (*х* + Δ*x*, *у* + Δ*y*) (см. рис. 1.2).



Рис. 1.2. Вычисление длины дуги.

При достаточной малости величины Δ*t* длина дуги, соединяющей точки *М* и *M* ' , будет сколь угодно близка к длине отрезка *МM* ', равной

.

При стремлении к нулю длины интервала времени Δ*t* точка *M*' стремится к *М*, и мы получаем следующее выражение для элемента дуги



где *y*' = *dy*/*dx*.

В результате соотношение (1.2) может быть записано в виде

 (1.3)

Полученное выражение связывает горизонтальную координату движущегося тела *х* со временем *t*. Отметим, что при *t* = 0 (т.е. в начальный момент времени) тело, находясь в точке *А*, имеет координату *х* = 0. В некоторый конечный момент времени *Т* оно попадает в точку *В* с горизонтальной координатой *x*1 (см. рис. 1.1). Тогда в результате интегрировании равенства (1.3) получаем

.

Итак, если задана кривая *у* = *у*(*х*), удовлетворяющая условиям (1.1), то, двигаясь вдоль нее под действием собственного веса, тело пройдет путь от точки *А* до точки *В* за время

.

Тем самым задача о брахистохроне сводится к минимизации функционала *Т* на множестве функций, удовлетворяющих условию (1.1). Полученная задача является типичным примером задач вариационного исчисления.

### 1.3. Задача максимизации дальности полета ракеты

Полет ракеты происходит в плоскости *х*, *у*, причем начало координат находится в точке старта, горизонтальная ось *х* направлена в сторону точки приземления, а вертикальная ось *у* – вверх (см. рис. 1.3). В течение заданного интервала времени  ракета летит под действием силу тяги, после чего двигатели отключается, и ракета продолжает свой полет по инерции, пока не приземлится. Задача состоит в отыскании такого закона изменения *u* **=** *u*(*t*) угла между направлением силы тяги и горизонтальной координатой на протяжении всего активного полета ракеты, т.е. при 0 **<** *t* **<** *T* , чтобы дальность ее полета *L* была максимальной. Изменение массы ракеты за счет сгорания топлива и сопротивление воздуха считаются достаточно малыми и не учитываются.

Дадим математическую формулировку данной задачи. Движение ракеты на интервале времени (0,*T*) (т.е. в ее активном полете) в соответствии со вторым законом Ньютона характеризуется уравнениями

 ,

где *m* – масса ракеты, *Р* – ее вес, а *Fx* и *Fy* – горизонтальная и вертикальная составляющие силы тяги (см. рис. 1.3). Справедливы равенства

*Fx* = *F* cos *u* , *Fy* = *F* sin *u* , *P* = *mg* .

Тогда уравнения движения принимают вид

, (1.4)

где *g* – ускорение свободного падения, а *а = F/m* – ускорение силы тяги, являющееся параметром процесса.



Рис. 1.3. Полет ракеты.

Известно, что при *t* **=** 0 ракета находится в начале координат и покоится. В этой связи начальные условия для системы (1.4) записываются следующим образом

. (1.5)

Выбирая некоторую функцию *u* **=** *u*(*t*) и решая задачу Коши (1.4), (1.5), можно найти координаты и составляющие вектора скорости движущейся ракеты. Это позволяет определить характеристики ракеты в момент времени *t* **=** *T*  отключения двигателей:

. (1.6)

После выключения двигателей при *t* **>** *T* ракета летит по инерции при постоянной действующей силе тяготения. Ее свободный полет описывается уравнениями:

 .

Общее решение последней системы имеет следующий вид:

*x*(*t*) = α1 *t* + β1 , *y*(*t*) = -*g t2*/2 + α2 *t* + β2 ,

где неизвестные константы α1 , β1 , α2 , β2 определяются с помощью соотношения (1.6). В результате находим значения

α1 = *uT* , β1 = *xT* – *uT T* , α2 = *vT* + *gT* , β2 = *yT* – *vTT* – *gT 2* /2.

Таким образом, движение ракеты в ее свободном полете характеризуется равенствами:

*x*(*t*) = *xT* + *uT* (*t* – *T*) , (1.7)

*y*(*t*) = *yT*+ *vT* (*t* – *T*) – *g* (*t* – *T*)2 / 2 . (1.8)

В момент *t* = τ приземления ракеты её вертикальная координата обращается в нуль. Полагая в равенстве (1.8) *t* = τ , получаем квадратное уравнение

*g*(τ – *T*)2 / 2 – *vT* (τ –*T*) – *yT*= 0.

Отсюда находим величину

 .

Поскольку момент приземления наступает после выключения двигателей, разность τ –*T* должна быть положительна. В этой связи в последнем соотношении следует выбрать знак "плюс" перед корнем.

Дальность полета ракеты *L* равна ее горизонтальной координате в момент приземления. Пользуясь формулой (1.7), найдем значение

*L* = *x*(τ) = *xT* + *uT* (τ – *T*) = *xT* + *uT* ** /** *g* .

Учитывая соотношения (1.6), заключаем, что, в том случае, когда функции *х* и *у* являются решениями задачи (1.4), (1.5) при данной функции *u* **=** *u*(*t*), дальность полета ракеты будет равна

*L*[*u*] = *x*(*T*) + **** .

Итак, мы получаем нахождения такой функции *u* **=** *u*(*t*) (управления), которая в соответствии с соотношениями (1.4), (1.5) максимизирует функционал *L*. Она является примером задачи оптимального управления.

### 1.4. Условие экстремума Ферма

Ставится следующая экстремальная задача:

**Задача** **2.1**. *Найти точку минимума функции f на множестве действительных чисел*.

Мы ограничимся анализом классической *теоремы Ферма* о необходимом условии минимума дифференцируемой функции.

**Теорема 2.1***. Для того чтобы дифференцируемая функция  достигала в точке τ своего минимума, необходимо, чтобы она удовлетворяла равенству*

 (2.1)

**Доказательство**. Если *x* есть точка минимума функции *f*, то справедливо неравенство

*f*(*σ*) ≥ *f*(*τ* ) ∀*σ*,

откуда следует соотношение

*f*(*τ* +*h*) ≥ *f*(*τ*) ∀*h*.

Пользуясь разложением в ряд Тейлора с учетом дифференцируемости рассматриваемой функции, установим равенство

**

где *η*(*h*)/*h*→0 при *h*→0. В результате последнее неравенство принимает вид

*f* '(*τ*)*h* + *η*(*h*) ≥ 0 ∀*h*. (2.2)

Отсюда при *h*>0 следует соотношение

*f* '(*τ*) + *η*(*h*)/*h* ≥ 0.

После перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

*f* '(*τ*) ≥ 0. (2.3)

Аналогично, из условия (2.2) при *h*<0 следует неравенство

*f* '(*τ*) + *η*(*h*)/*h* ≤ 0,

откуда после перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

*f* '(*τ*) ≤ 0. (2.4)

Из соотношений (2.3), (2.4) следует условие (2.2).

Итак, решение задачи 2.1, т.е. поиск минимума функции на множестве действительных чисел сводится к анализу соотношения (2.1), представляющего собой алгебраическое уравнение (вообще говоря, нелинейное) относительно искомого значения *τ*.

**Замечание 2.1**. Обращаем внимание на существование глубокой связи между двумя, казалось бы, различными разделами математики – теорией экстремума и теорией уравнений. Эта связь будет неизменно присутствовать и при рассмотрении других, существенно более сложных задач.

**Определение 2.1**. *Уравнение* (2.1) *будем называть* ***условием******стационарности*** *или* ***условием******Ферма****, а его решение –* ***точкой стационарности*** *или* ***критической точкой*** *функции* *f*.

### 1.5. Примеры

Рассмотрим некоторые характерные примеры.

**Пример 2.1**. Дана функция  Условие (2.1) для этой нее принимает вид  Единственное решение  полученного уравнения и является точкой минимума функции  (см. рис. 2.1).



Рис. 2.1. Единственная точка стационарности   
является абсолютным минимумом функции.

**Замечание 2.2**. В данном случае нахождение точки стационарности из соотношения (2.1) не вызвало особых затруднений. Однако в общем случае мы имеем дело с нелинейным алгебраическим уравнением, решение которого, как правило (для достаточно сложных функций *f*), далеко не тривиально и может быть найдено лишь приближенно на основе тех или иных вычислительных алгоритмов.

Рассмотренный пример соответствует простейшему случаю. Однако возможны и другие ситуации.

**Пример 2.2**. Дана функция  Соотношение (2.1) приводит к кубическому уравнению  Оно имеет три решения:  Непосредственной подстановкой определяем соответствующие значения рассматриваемой функции  Очевидно, лишь первое из найденных величин может соответствовать минимуму функции  на множестве действительных чисел (см. рис. 2.2), т.е. ее абсолютному минимуму(минимуму на всей области определения функции). Третье решение уравнения (2.1) соответствует локальному минимуму данной функции, т.е. минимизирует рассматриваемую функцию не всюду, а лишь в окрестности точки  Наконец, точка  соответствует локальному максимуму исследуемой функции.

**Замечание 2.3**. Отбросить "лишние" точки стационарности функции  можно, например, проверяя знаки второй производной в этих точках. Однако мы не будем это делать, поскольку вычисление вторых производных для рассматриваемых в дальнейшем задач оптимального управления (особенно, не линейных) является чрезвычайно громоздкой процедурой, как правило, не приводящей к содержательным результатам.

Полученные результаты приводят к необходимости уточнения используемых понятий, в частности, точек экстремума.



Рис. 1.2. Точки стационарности функции 

**Определение 2.2** (см. рис. 2.3). *Функция f имеет в точке τ* ***локальный минимум***(*соответственно*,***локальный максимум***), *если существует такая окрестность О этой точки, что справедливо неравенство * (*соответственно*, **) *для всех  Если в указанных соотношениях знак равенства возможен исключительно при  то говорят о* ***строгом******локальном минимуме*** (*максимуме*). *Если же данные неравенства справедливы для всех значений σ*, *то* *τ является точкой* ***абсолютного минимума***(*максимума*) *функции f*.



Рис. 2.3. Типы экстремумов функции.

Пусть задана экстремальная задача *Р* и некоторое соотношение *Q*, которому могут удовлетворять или не удовлетворять какие-либо объекты из множества, на котором осуществляется нахождение экстремума.

**Определение 2.3**. *Соотношение Q называется* ***необходимым условием экстремума*** *для задачи Р*, *если любое решение Р удовлетворяет соотношению Q*. *Соотношение Q называют* ***достаточным условием экстремума*** *задачи Р*, *если любой, удовлетворяющий ему объект оказывается решением задачи Р*.

**Замечание 2.4**. Если *Р* есть задача оптимального управления, то используется термин *необходимое* (*достаточное*) *условие оптимальности*.

Если условия экстремума являются необходимыми и достаточными, то его решения и только они оказываются решениями исследуемой экстремальной задачи (см. рис. 2.4), т.е. экстремальная задача и условия экстремума эквивалентны.



Рис. 2.4. Соотношения между множествами *U*0 решений  
экстремальной задачи и *U*\* решений условия экстремума.

**Замечание 2.5**. В принципе, произвольные множества *U*0 и *U*\* могут быть и не вложены одно в другое. Однако в этом случае нет оснований называть *U*\* множеством решений условия экстремума.

Итак, соотношение (2.1) является необходимым условием локального минимума (и максимума тоже) для дифференцируемой функции.

**Замечание 2.6**. Обратимся к доказательству теоремы 2.1. Если бы рассматриваемая точка *τ* доставляла максимум, а не минимум функции *f*, то в выражение в левой части неравенства (2.2) имело бы противоположный знак. Вследствие этого вместо (2.3) мы бы получили соотношение (2.4). Однако мы и так получили неравенство (2.4) за счет выбора в условии (2.2) отрицательного значения параметра *h*. Точно так же неравенство (2.3) может быть выведено из условия максимума функции *f* в точке *τ*. Таким образом, оба неравенства (2.3) и (2.4), а значит, и условие стационарности (2.1) могут быть в равной степени получены в том случае, когда *τ* является точкой минимума и максимума функции *f*. Следовательно, на основе соотношения (2.1) нельзя отличить минимум от максимума функции. Если теперь *τ* оказывается лишь точкой локального минимума функции, то соотношение (2.2) будет справедливо не для всех *h*, а лишь для достаточно малых значений этого параметра. В этом случае ничто не мешает нам вновь перейти к пределу при *h*→0 и получить неравенство (2.3), а значит, и условие стационарности. Это объясняет тот факт, что соотношению (2.1) может удовлетворять как точка абсолютного экстремума функции, так и точка ее локального экстремума.

Продолжаем исследование возможных свойств условия стационарности.

**Пример 2.3**. Дана функция  Пользуясь условием стационарности, находим три решения уравнения (2.1):   Из них второе соответствует локальному максимуму рассматриваемой функции, а остальные являются решениями задачи ее минимизации (см. рис. 2.5). В данном случае мы имеем дело с отсутствием единственности решения и достаточности условия стационарности.



Рис. 2.5. Функция имеет две точки минимума.

**Замечание 2.7**. Если *τ* является не единственной точкой минимума функции *f*, то всё равно будет выполнено соотношение  для всех значений *σ*. Тем самым вновь будет справедливо неравенство (2.2), а значит, и условие стационарности.

**Пример 2.4**. Дана функция  Условие стационарности в данном случае сводится к соотношению  не имеющему решения. Понятно, что сама задача минимизации рассматриваемой функции также не имеет решения (см. рис. 2.6). Тем не менее, поскольку множества решений данной задачи и соотношения (2.1) совпадают (оба пусты), есть основания считать, что используемое условие экстремума является необходимым и достаточным.



Рис. 2.6. Точки стационарности для неразрешимой экстремальной задачи отсутствуют.

**Замечание 2.8**. Доказательство теоремы 2.1 начинается с предположения о том, что *τ* есть точка минимума рассматриваемой функции. Если это предположение не реализуется, то и последующие рассуждения теряют смысл. В этой связи отсутствие решений условия стационарности в последнем примере вполне естественно.

**Замечание 2.9**. Отметим, что недостаточность условия экстремума и отсутствие минимума функции являются качественно разными свойствами. В частности, в примере 2.2 минимум существует, но нет достаточности, а в примере 2.4 есть достаточность, но нет минимума.

**Пример 2.5**. Рассматривается функция  Необходимое условие экстремума здесь имеет единственное решение  которое не минимизирует функцию  (см. рис. 2.7). Задача ее минимизации не имеет решения, вследствие чего соотношение (1.1) является необходимым, но не достаточным условием экстремума.



Рис. 2.7. Единственная точка стационарности не минимизирует функцию.

**Замечание 2.10**. Как и в предшествующем примере, предположение о том, что в некоторой точке *τ* достигается минимум рассматриваемой функции, оказалось не верным. Это обстоятельство не позволяет воспроизвести доказательство теоремы 1.1 для данной функции и установить соотношение (2.1) как следствие указанного предположения. Однако этот факт вовсе не означает, что условие стационарности не может выполняться само по себе.

**Замечание 2.11**. Характерно, что в последнем примере единственная точка стационарности не является даже точкой локального экстремума рассматриваемой функции. Это обстоятельство, конечно же, связано с отсутствием таковых у рассматриваемой функции. В данном случае мы имеем дело с *точкой перегиба* функции. Любопытно, что в данной точке обращается в нуль не только первая, но и вторая производная функции. Последний пример показывает, что точки стационарности могут существенно различаться по своим свойствам.

**Замечание 2.12**. Не надо, впрочем, думать, что обращение в нуль первых двух производных функции в некоторой точке является свидетельством того, что мы имеем дело именно с точкой перегиба. Подобная ситуация реализуется, к примеру, для функции  в нуле. Тем не менее, эта функция имеет там абсолютный минимум.

**Замечание 2.13**. Для функции одной переменной решение условия стационарности оказывается либо точкой экстремума (локального или абсолютного), либо точкой перегиба. Для функций многих переменных, а, тем более, для функционалов общего вида существует значительно более богатое многообразие форм критических точек.

Последние два примера свидетельствуют об актуальности проблемы существования решения рассматриваемой экстремальной задачи.

**Пример 2.6**. Дана функция  Вследствие ее недифференцируемости необходимое условие экстремума (2.1) здесь оказывается не применимым. Таким образом, поиск реально существующей точки минимума  (см. рис. 2.8) требует привлечения другого математического аппарата.



Рис. 2.8. Условие стационарности   
не позволяет определить минимум недифференцируемой функции.

**Замечание 2.14**. Естественно, в том случае, когда минимизируемая функция не является дифференцируемой, мы не сможем получить неравенство (2.2) и вытекающее из него условие стационарности. Тем не менее, задача минимизации этой функции вполне осмысленна, а следовательно, разработка эффективных методов решения подобных задач представляет несомненный интерес.

На основании рассмотренных примеров можно выделить следующие проблемы, связанные с применением условия стационарности для задачи 2.1 отыскания минимума данной функции:

* *существование решения экстремальной задачи* (для неразрешимых задач необходимое условие экстремума либо не имеет решения, либо дает заведомо не верные результаты);
* *единственность решения экстремальной задачи* (в отсутствии единственности необходимое условие экстремума наверняка имеет не единственное решение);
* *достаточность условия стационарности* (в отсутствии достаточности решение условия стационарности может не быть решением экстремальной задачи);
* *применимость условия стационарности* (в отсутствии дифференцируемости *минимизируемой функции* условие стационарности оказывается не применимым).
* *практическая реализация условия стационарности* (соотношение (2.1) представляет собой, вообще говоря, нелинейное алгебраическое уравнение, непосредственное решение которого далеко не очевидно);

Все выше указанные проблемы существенно усложняются при переходе к более сложным экстремальным задачам, которые, собственно, и являются непосредственным предметом данного курса.

### Задания на самостоятельную работу

Рассматриваются примеры применения условия стационарности для задачи минимизации функции одной переменной. Требуется привести примеры функций с описанными ниже свойствами. Следует иметь в виду, что некоторые из описанных ситуаций невозможны. В этом случае необходимо дать соответствующие объяснения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **пример 1** | **пример 2** | **пример 3** |
| 1 | Условие стационарности имеет единственно решение, которое не оптимально | Условие стационарности не имеет решения | Условие стационарности имеет три решения – локальные минимум и максимум и абсолютный минимум |
| 2 | Условие стационарности не имеет решения, хотя минимум функции  существует | Условие стационарности имеет единственно решение, которое оптимально | Условие стационарности не является необходимым условием минимума |
| 3 | Условие стационарности имеет три решения – локальные минимум и максимум и абсолютный максимум | Условие стационарности имеет два решения, которые обе оптимальны | Условие стационарности является достаточным условием минимума |
| 4 | Условие стационарности является достаточным условием минимума | Условие стационарности имеет единственно решение, которое не оптимально | Условие стационарности имеет три решения – два локальных и один абсолютный минимум |
| 5 | Условие стационарности является необходимым и достаточным условием минимума | Условие стационарности  не применимо | Условие стационарности имеет два решение – минимум и максимум |
| 6 | Условие стационарности не имеет решения, хотя минимум функции  существует | Условие стационарности для  функции с бесконечным множеством минимумов | Условие стационарности не является достаточным условием максимума |
| 7 | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых оптимально | Условие стационарности не имеет решения | Условие стационарности является достаточным условием максимума |
| 8 | Условие стационарности имеет два решения и является достаточным условием минимума | Условие стационарности имеет решение, хотя функция не имеет минимума | Условие стационарности  не применимо |
| 9 | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых не оптимально | Условие стационарности для  функции с двумя точками абсолютного минимума | Условие стационарности не является необходимым условием максимума |

### Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., Наука, 1979. –   
   С. 24-27, 44-47.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М., ГИТТЛ, 1956. – С. 8-9.
3. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. – Ижевск, 2001. – С. 107-108.
4. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. – Л., 1933. – С. 4.

### План дальнейших исследований

Первая часть курса посвящена классическому разделу теории экстремума – *вариационному исчислению*, в котором рассматриваются задачи нахождения экстремумов, как правило, интегральных функционалов при наличии, быть может, ограничений в форме равенств.